МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 621.38:519.8 10.23947/1992-5980-2017-17-4-14-21

Исследование методик определения констант поляризованной пьезокерамики (часть II)*

В. В. Мадорский[1**]
[1]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Study on polarized piezoceramics constant techniques definition (Part 2)***

V. V. Madorsky[1**]
[1]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Введение. Статья посвящена определению полного набора всех десяти электроупругих модулей поляризованной керамики, который необходим для анализа работы пьезокерамических чувствительных элементов различных приборов при численном решении краевых задач методом конечных элементов.

Целью данной работы является создание нового метода определения констант пьезокерамических материалов, основанного на измерении частот резонансов и первых низкочастотных антирезонансных частот только на одном образце в виде кольца.

Материалы и методы. Предложен новый метод определения полного набора упругих, пьезоэлектрических, диэлектрических модулей поляризованной пьезокерамики. При этом используется только один образец. Метод определения констант керамики основан на измерении резонансных частот и первого низкочастотного антирезонанса для элемента в виде кольца с осевой поляризацией. Первые семь констант, кроме сдвиговых, измеряют для кольца с электродами на торцах. Сдвиговые модули измеряют на том же кольце, но с новыми электродами на боковых цилиндрических поверхностях. Старые электроды на торцах удаляются. Для проверки корректности методики используется программа *ANSYS*, реализующая метод конечных элементов.

Результаты исследования. Для пьезокерамики *PZT*4 приведен полный набор констант, определенных новым методом — с использованием только одного образца. Погрешность определения констант, как правило, не превышает 1 %.

Обсуждение и заключения. В работе приведены результаты исследований нового обоснованного численного метода и алгоритма определения полного набора совместимых материальных констант пьезокерамики на одном образце в виде кольца с различными электродами. Главное достоинство данного метода — для определения полного набора модулей пьезокерамики используется только один образец. В других методах измеренные модули пьезокерамики не являются совместимыми в силу того, что частоты резонансов и антирезонансов измеряются на трех различных по геометрии и степени поляризации образцах.

Introduction. The complete set of all ten electro-elastic moduli of the polarized ceramics essential for the analysis of piezoceramic sensing elements of various devices under the numerical solution to boundary value problems by the finite element method is considered. The work objective is to develop a new technique for determining constants of piezoelectric materials based on measuring the resonance frequencies and the first low-cycle antiresonance frequencies on one ring-like sample only.

Materials and Methods. A new method of determining the full set of elastic, piezoelectric, and dielectric moduli of the polarized piezoelectric ceramics is proposed. Therewith, one sample only is used. This method is based on measuring the resonance frequencies and the first underfrequency antiresonance for an element in the form of an axial polarization ring. The first seven constants, apart from shear ones, are measured for the ring with electrodes on the ends. Shear moduli are measured on the same ring but with new electrodes on the lateral cylindrical surfaces. Old electrodes on the ends are removed. The ANSYS program implementing the finite element technique is used to validate the methodology.

Research Results. For PZT4 piezoelectric ceramics, the complete set of constants defined by a new method – using only one sample – is given. The accuracy of determining the constants, as a rule, does not exceed 1%.

Discussion and Conclusions. The paper presents the research results of a new valid numerical method and algorithm for determining the full set of compatible material constants of the piezoelectric ceramics on a single ring-like sample with different electrodes. The primary advantage of this method is that only one sample is used to determine the complete set of piezoceramic moduli, whereas in other methods, the measured piezoelectric moduli are not compatible since the frequencies of the resonances and antiresonances are measured at three samples different in geometry and degree of polarization.

*Работа выполнена в рамках инициативной НИР.
**E-mail: epohrbats@Gmail.com
***The research is done within the frame of the independent R&D.

Ключевые слова: пьезоэлектрическая керамика, определение полного набора констант, метод резонанса — антирезонанса, кольцо, метод конечных элементов, программа *ANSYS*, метод возмущений.

Keywords: piezoelectric ceramics, definition of full set of constants, resonance — antiresonance method, ring, finite element method, ANSYS program, perturbation approach.

***Образец для цитирования*:** Мадорский, В. В. Исследование методик определения констант поляризованной пьезокерамики (часть II) / В. В. Мадорский // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2017. — Т. 17, № 4. — С. 14–21.

For citation: V.V. Madorsky. Study on polarized piezoceramics constant techniques definition (Part 2). Vestnik of DSTU, 2017, vol. 17, no.4, pp. 14–21.

Введение. Для анализа работы пьезокерамических чувствительных элементов различных приборов необходим полный набор электроупругих модулей: пять упругих, три пьезоэлектрические и две диэлектрические константы. Для определения полного набора электроупругих постоянных известными методами (например, наиболее широко применяемым методом «резонансов — антирезонансов» [1, 2]) необходимы измерения характеристик трех типоразмеров: стержней, пластин или дисков с колебанием по толщине и пластин, работающих на сдвиг. Главные недостатки данного метода:

— как показано в [3], сложно определить (измерить) на измерительном стенде частоты «антирезонанса» для высокочастотных колебаний;

— для поляризации стержней с межэлектродным расстоянием порядка 10–20 мм часто требуются электрические напряжения до 100–200 кВ;

— необходима дополнительная проверка совместимости значений полного набора электроупругих констант путем сравнения значений коэффициента связи k_t, измеренного из толщинных колебаний и определенного расчетным путем по результатам измерений на образцах виде стержней [1];

— при колебаниях сдвига, согласно [1], края пластины необходимо «демпфировать вязким материалом (жидкость, резина, клей и др.)».

В силу того, что константы пьезокерамических материалов (ПКМ) определяются на различных образцах, они (константы) могут считаться совместимыми только при устранении вышеперечисленных недостатков. Однако большинство экспериментальных данных свидетельствует о существенной неоднородности физических свойств ПКМ, возникающей в процессе спекания и поляризации пьезоэлементов, имеющих различные геометрические формы [4].

Целью данной работы является создание нового метода определения констант ПКМ, основанного на измерении частот резонансов и первых антирезонансных частот на **одном** образце в виде кольца.

Это достигается тем, что первые семь констант (s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{33}, d_{31}, d_{33}, ε_{33}^T) измеряют на пьезокерамическом элементе в виде кольца с осевой поляризацией и с электродами на торцах, а сдвиговые модули (s_{44}, d_{15}, ε_{11}^T) измеряют на том же кольце, но с новыми электродами на боковых цилиндрических поверхностях (старые электроды на торцах удаляются).

В настоящей работе для проверки корректности методики получено численное решение краевых задач методом конечных элементов. В качестве программы, реализующей метод конечных элементов, используется *ANSYS* [5].

Материалы и методы

1. Методика определения констант материала, кроме сдвиговых, для кольца с электродами на торцах. Рассмотрим пьезоэлектрическое кольцо толщиной $2h$ и радиусами a и b ($a > b$). Введем цилиндрическую систему координат (r, Θ, z), причем ось z совпадает с направлением оси поляризации. Координатная плоскость $z = 0$ совпадает со срединной плоскостью кольца.

Основываясь на известных линейных пьезоэлектрических соотношениях [6], уравнения осесимметричных колебаний кольца можно записать в следующем виде:

$$T_{rr,\,r} + T_{rz,\,z} + (T_{rr} - T_{\theta\theta})/r + \rho\omega^2 U = 0,$$
$$T_{rz,\,r} + T_{rz}/r + T_{zz,\,z} + \rho\omega^2 W = 0,$$
$$D_{r,\,r} + D_r/r + D_{z,\,z} = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее введены следующие обозначения и определения: U, W — механические смещения по осям r, z соответственно; ω — круговая частота; ρ — плотность; T_{mn} — механические напряжения; D_r, D_z — компоненты вектора электрической индукции $\boldsymbol{D}$. Запятая обозначает дифференцирование по символу, следующему за запятой.

В случае осевой поляризации уравнения состояния в цилиндрических координатах можно записать в следующем виде:

$$T_{rr} = c_{11}\,U_{,r} + c_{12}\,U/r + c_{13}\,W_{,z} + e_{31}\,\varphi_{,z}, \quad (2)$$
$$T_{\theta\theta} = c_{12}\,U_{,r} + c_{11}\,U/r + c_{13}\,W_{,z} + e_{31}\,\varphi_{,z}$$
$$T_{zz} = c_{13}\,U_{,r} + c_{13}\,U/r + c_{33}\,W_{,z} + e_{33}\,\varphi_{,z}$$
$$T_{rz} = c_{44}\,U_{,z} + c_{44}\,W_{,r} + e_{15}\,\varphi_{,r}$$

$$D_r = e_{15}(U_{,z} + W_{,r}) - \varepsilon_{11}\varphi_{,r};\ D_z = e_{31}(U_{,r} + U/r) + e_{33}W_{,z} - \varepsilon_{33}\varphi_{,z}.$$

В соотношениях (2) и далее введены следующие обозначения:

— c_{mn} — упругие постоянные в матричном обозначении, измеренные на образцах с закороченными электродами или при электрическом поле $\boldsymbol{E} = const$;

— e_{mn} — пьезоконстанты;

— ε_{mn} — диэлектрические проницаемости для зажатого образца;

— φ — электрический потенциал.

Будем считать, что на электродированных торцах кольца и на боковых поверхностях кольца a, b заданы граничные условия:

$$z = \pm h\ T_{zz} = 0;\ T_{rz} = 0;\ \varphi = \pm V; \qquad (3)$$
$$r = a, b\ T_{rr} = 0;\ T_{rz} = 0;\ D_r = 0.$$

В (3) величина $2V$ — подведенная к торцам электрическая разность потенциалов.

Решение данной краевой задачи (1–3) состоит из суммы двух решений:

— однородного решения при нулевых граничных условиях при $z = \pm h$;

— частного решения, удовлетворяющего только условиям на торцах $z = \pm h$.

Не составляет труда построить частное решение $D_z = const$ и $D_r = 0$, которое автоматически удовлетворяет третьему уравнению из (3). Механические и электрические составляющие частного решения равны:

$$T_{rr}^0 = T_{\theta\theta}^0 = A(e_{31} + c_{13}\varepsilon_{33}/e_{33})\,\beta\sin(\beta\varsigma)/h + e_{31}K/h;\ U^0 = 0; \qquad (4)$$
$$\varphi^0 = K\varsigma + A\sin(\beta\varsigma);\ D_z^0 = -\varepsilon_{33}K/h;\ T_{zz}^0 = e_{33}K/h + A\beta\, e_{33p}\cos(\beta\varsigma)/h.$$

В (4) и далее введены следующие обозначения:

— безразмерные координаты $\varsigma = z/h$, $\xi = r/a$;

— безразмерная частота $\Omega^2 = \rho(\omega h)^2/c_{44}$;

— $\beta^2 = c_{44}\,\Omega^2/c_{33}^D$;

— $e_{33p} = e_{33} + c_{33}\varepsilon_{33}/e_{33}^2$;

— $k_t^2 = 1 - c_{33}/c_{33}^D$; (5)

— коэффициенты $A = -Ve_{33}/(e_{33p}(\beta\cos(\beta) - k_t^2\sin(\beta)))$;

— $K = V/(1 - k_t^2\,\mathrm{tg}(\beta)/\beta)$.

Построение однородных решений при условии, что вектор внешних усилий и электрический потенциал равны нулю на торцевых поверхностях, связано с определением корней дисперсионного уравнения. Для симметричных колебаний дисперсионное уравнение имеет вид [7]:

$$a_n M_n\, cth(\beta_n) = 0\ (n = 1, 2, 3). \qquad (6)$$

В (6) введены следующие обозначения:

$$a_n = -\alpha^2 c_{13}k_{1n} + c_{33}k_{2n} + e_{33}k_{3n};\ b_n = k_{1n}\beta_n + k_{2n}; \qquad (7)$$
$$M_1 = b_2k_{33} - b_3k_{32};\ M_2 = b_3k_{31} - b_1k_{33};\ M_3 = b_1k_{32} - b_2k_{31},$$

где величина k_{mn} — алгебраические дополнения элементов третьей строки определителя системы для симметричных колебаний (1); β_n — корень бикубического уравнения из [7].

Для нахождения корней α при заданных значениях Ω необходимо совместно решить дисперсионное и бикубическое уравнения. Подробный анализ корней дисперсионного уравнения симметричных колебаний для пьезоэлектрического слоя приведен в [7].

Построенное однородное решение должно удовлетворять следующим граничным условиям на боковых поверхностях кольца при $r = a, b$:

$$\sigma_{rr} = -T_{rr}^0;\ \sigma_{rz} = 0;\ d_r = 0, \qquad (8)$$

где σ_{rr}, σ_{rz} — механические напряжения, d_r — компонента вектора электрической индукции для однородного решения.

Именно сумма частного и однородного решений позволит удовлетворить граничным условиям (3) как на торцах, так и на боковых поверхностях кольца.

Здесь остановимся на таком известном явлении, как толщинный резонанс, или «толщинный парадокс». С одной стороны, важным свойством толщинного резонанса является независимость собственной частоты от радиуса и простота его определения по формуле

$$1 - k_t^2\,\mathrm{tg}(\beta)/\beta = 0. \qquad (9)$$

Для толщинных колебаний считалось, что поперечное волновое число $\alpha = 0$ — таким образом, теория толщинных колебаний одномерная.

С другой стороны, многочисленные данные [8–10] о рельефе осесимметричных колебаний торцевых поверхностей при толщинных резонансах исследуемых ПКМ демонстрируют сильную зависимость перемещения W от радиуса. При этом не обнаружено ни одного толщинного резонанса с приблизительно поршневым движением торцевых поверхностей даже в случае малой относительной толщины исследуемых образцов. Более того, движение различных

участков этих поверхностей может быть противофазным. Представленные данные позволяют утверждать, что эти высокочастотные колебания не могут быть описаны с помощью одномерных идеализированных теорий.

В данной работе дано объяснение этому «толщинному парадоксу». В частном решении (4), (5) и в граничных условиях для однородного решения (8) существует общий множитель $1/(1 - k_t^2\ \mathrm{tg}(\beta)/\beta)$ и очевидно, что и частное, и однородное решения могут одновременно удовлетворять условию толщинного резонанса (9). При этом движения больших торцевых поверхностей не будут близки к поршневому движению из-за сложного по форме однородного решения (в области толщинного резонанса имеются три дисперсионные кривые $\Omega(\alpha)$, и решение зависит от координат r, z [7]).

Как видно из построенного частного решения для пьезоэлектрического слоя при поляризации по толщине и с электродами на торцах, условие толщинного резонанса в виде (9) будет одинаковым как для диска, так и для кольца или пластины. Это было подтверждено и численным анализом с помощью программы *ANSYS*. Для кольца это впервые было показано в [8].

В предлагаемом ниже методе упругие податливости s_{11}, s_{12} и s_{13}, измеренные на образцах с закороченными электродами или при постоянном электрическом поле, определяются с помощью измеренных трех первых последовательных резонансов кольца.

Пьезомодуль d_{31} определяем из измеренной первой низкочастотной антирезонансной частоты. Диэлектрическую константу ε_{33}^T свободного образца рассчитаем из измеренной емкости кольца на частоте 1 КГц. Упругую константу c_{33}^D и коэффициент связи k_t измеряем из первых двух резонансных частот толщинных колебаний.

Решение обратной задачи, или определение модулей керамики из критических частот, удобнее проводить приближенными методами, основанными на учете толщинных поправок в решении для кольца. В данной работе решение ищем в виде разложения по малому параметру — относительной частоте Ω^2:

$\alpha^2 = t\Omega^2 + \gamma\Omega^4 + \eta\Omega^6\ldots$

$$U = U_0 + \Omega^2 U_2 + \Omega^4 U_4 + \ldots \qquad (10)$$

Здесь α — безразмерное волновое число или корень дисперсионного уравнения (6); t, γ, η — неизвестные постоянные, зависящие от модулей пьезокерамики; U_n — вектор, составляющие которого U (U, W, φ).

Опуская громоздкие выкладки и ограничиваясь членами с Ω^6 для определения волнового числа α^2 и Ω^4 для смещений U в (10), приведем конечный результат рассматриваемой краевой задачи с граничными условиями (3) на торцах:

$$t = c_{44}/c^P_{11};\ \gamma = t^2(c_{13}/c_{33})^2/3;\ c_{13}/c_{33} = -s_{13}/(s_{11}+s_{12}); \qquad (11)$$
$$c^P_{11} = c_{11} - c^2_{13}/c_{33} = 1/(s_{11}(1-\nu^2));\ \nu = -s_{12}/s_{11};$$
$$\eta = t^3\{2/9\,(c_{13}/c_{33})^4 + (c_{13}/c_{33})^2/3\,[\,2/15\,(c_{13}/c_{33}) + 2/5\,c^P_{11}/c_{33} - (c_{13}/c_{33})^2/3 + piezo]\};$$
$$piezo = 1/45\,(c_{13}/c_{33})^2\,[(d_{31}/(s_{11}+s_{12}) - c^P_{11}(2d_{31}\,(c_{13}/c_{33}) + d_{33}))/(\varepsilon_{33}^T(1-k_p^2))].$$

Далее введем следующие определения и обозначения:

k_p^2 — планарный коэффициент связи;

$\alpha^2_0 = t\Omega^2$ — приближенное волновое число нулевого порядка;

$\alpha^2_2 = t\Omega^2 + \gamma\Omega^4$ — приближенное волновое число второго порядка;

$\alpha^2_4 = t\Omega^2 + \gamma\Omega^4 + \eta\Omega^6$ — приближенное волновое число четвертого порядка.

В табл. 1 представлены результаты точного решения волнового числа α из дисперсионного уравнения (6) и приближенный расчет из (10) и (11) для $\varepsilon = 0{,}033$ для различных приближений.

Таблица 1

Table 1

Пример расчета волнового числа α для различных частот для рассматриваемого пьезокерамического кольца

Calculation example of wave number α for various frequencies for piezoceramic ring under study

f, КГц	Ω	α из (6) точное решение	α_0	α_2	α_4 с *piezo* = 0	α_4
50	0,085	0,045055	0,045049	0,045055	0,045055	0,045055
250	0,425	0,22605	0,22524	0,22603	0,22605	0,22605
500	0,85	0,45742	0,45049	0,45676	0,45744	0,45741
700	1,1903	0,65168	0,63068	0,64777	0,65138	0,65123

Приведенные в табл. 1 результаты показывают, что для рассматриваемого кольца с толщиной 1 мм для частот до 700 КГц расчет волновых чисел из дисперсионного уравнения и приближенный расчет для α_4 практически совпадают, а пьезоэлектрической поправкой *piezo* можно пренебречь.

Частотное уравнение, соответствующее низкочастотным колебаниям, для колебаний кольца с учетом его относительной толщины $\varepsilon = h/a$ имеет вид:

$$a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = 0. \qquad (12)$$

Здесь $a_{11} = F_1(x_1)\, [1 + \alpha_0^2\, c_{13}/c_{33}(1/3 + (c_{13}/6c_{33}))] - 1/3\, (\alpha_0\, c_{13}/c_{33})^2 J_0(x_1)$;

$$a_{12} = F_2(x_1)\, [1 + \alpha_0^2\, c_{13}/c_{33}(1/3 + (c_{13}/6c_{33}))] - 1/3\, (\alpha_0\, c_{13}/c_{33})^2 N_0(x_1);$$

$$a_{21} = F_1(x_2)\, [1 + \alpha_0^2\, c_{13}/c_{33}(1/3 + (6c_{13}/c_{33}))] - 1/3\, (\alpha_0\, c_{13}/c_{33})^2 J_0(x_2);$$

$$a_{22} = F_2(x_2)\, [1 + \alpha_0^2\, c_{13}/c_{33}(1/3 + (c_{13}/6c_{33}))] - 1/3\, (\alpha_0\, c_{13}/c_{33})^2 N_0(x_2);$$

$$x_1 = \alpha_4/\varepsilon;\ x_2 = x_1\, b/a;\ F_1(x) = xJ_0(x) - (1 - \nu)J_1(x)];\ F_2(x) = xN_0(x) - (1 - \nu)N_1(x).$$

В уравнении (12) ν — коэффициент Пуассона; $J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя первого рода; $N_0(x)$, $N_1(x)$ — функции Бесселя второго рода нулевого и первого порядков.

Частотное уравнение (12) для тонких пьезоэлектрических элементов зависит только от упругих податливостей s_{11}, s_{12}, s_{13} и относительной толщины ε через α_4.

Первый (основной) резонанс $f_{0,}$ рассчитанный из частотного уравнения (12), называют частотой резонанса по окружности, остальные два — частоты резонанса по толщине стенки кольца.

Для расчета резонансных частот использовались: метод однородных решений, программа *ANSYS*, приближенный расчет по формуле (12) с учетом толщинных поправок и расчет без учета толщинных поправок ($\varepsilon = 0$) для рассматриваемого кольца (a = 15 мм, b = 3 мм). Результаты представлены в табл. 2

Таблица 2

Table 2

Пример расчета резонансных частот

Calculation example of resonance frequencies

	Точное решение (1–3)	*ANSYS*	Приближенное решение (12)	Решение (12) при $\varepsilon = 0$
f_0, КГц	66719	66719	66720	66736
f_1, КГц	174426	174460	174388	174690
f_2, КГц	303376	303480	303319	304930

Для определения величин пьзомодуля d_{31} или коэффициента связи k_p^2 необходимо воспользоваться другим типом однородных электрических условий — равенством нулю тока на электродах. Этот тип граничных условий соответствует условиям антирезонанса. Ограничиваясь приближением нулевого порядка в (10, 11), получим из [11] условие для первого низкочастотного антирезонанса:

$$1 - k_p^2 + k_p^2(1 + \nu)\, [\mathbf{\Delta}_1/\mathbf{\Delta}\, (J_1(x_1) - b/a\, J_I(x_2)) + \mathbf{\Delta}_2/\mathbf{\Delta}\, (N_1(x_1) -$$
$$- b/a\, N_1(x_2))]/(1 - b^2/a^2) = 0.$$

Здесь

$$x_1 = \alpha_0/\varepsilon;\ x_2 = x_1\, b/a;\ \mathbf{\Delta} = F_1(x_1)\, F_2(x_2) - F_2(x_1)\, F_1(x_2); \qquad (13)$$
$$\mathbf{\Delta_1} = F_2(x_2) - b/a\, F_2\, (x_1);\ \mathbf{\Delta_2} = b/a\, F_1(x_1) - F_1(x_2).$$

При $b \to 0$ уравнение (13) вырождается в уравнение антирезонансных частот диска нулевой толщины [3].

Для определения упругого модуля c_{33}^D и коэффициента связи k_t^2 измерим два толщинных резонанса. Имея два уравнения (9) с двумя неизвестными численными методами [12] можно определить c_{33}^D и k_t^2. Далее легко рассчитать пьезомодуль d_{33}, используя соотношения:

$$k_t^2/(1 - k_t^2) = (e_{33}/c_{33})^2\, c_{33}^D/\, (\varepsilon_{33}^T(1 - k_p^2));\ d_{33} = e_{33}/c_{33} - 2d_{31}\, e_{33}/c_{33}.$$

2. Методика определения сдвиговых констант для кольца с электродами на боковых поверхностях. Исследуем теперь возбуждение в рассматриваемом кольце сдвиговой моды колебаний. Для этого при неизменной поляризации ПКМ необходимо поместить новые электроды на внутреннюю и внешнюю цилиндрические поверхности кольца, а старые электроды на торцах удалить. Решим данную задачу методом однородных решений. Метод однородных решений для антисимметричных колебаний пьезоэлектрического слоя подробно описан в [12].

Удовлетворяя однородным граничным условиям на торцах при

$$z = \pm h\ T_{zz} = 0;\ T_{rz} = 0;\ D_z = 0, \qquad (14)$$

получаем известное дисперсионное уравнение антисимметричных колебаний

$$a_n\, M_n\, th\, (\beta_n) = 0\ (n = 1, 2, 3), \qquad (15)$$

где $M_1 = b_2\, d_3\, k_{33} - b_3\, d_2\, k_{32}$; $M_2 = b_3\, d_1\, k_{31} - b_1\, d_3\, k_{33}$; $M_3 = b_1\, d_2\, k_{32} - b_2\, d_3\, k_{31}$; $d_n = -\alpha^2\, e_{13}\, k_{1n} + e_{33}\, k_{2n} + \varepsilon_{33}\, k_{3n}$; параметры $a_{n,}$ β_n,b_n, k_{mn} определены в (7).

Корни дисперсионного уравнения (15) и определяют систему однородных решений антисимметричных колебаний.

Построим их асимптотику в окрестности $\alpha = 0$. В уравнениях (7, 15) положим $\alpha = 0$, $\Omega \neq 0$, которые являются началом дисперсионных кривых. При этих условиях система уравнений (1, 2) вырождается, и ее решение представляет толщинные колебания рассматриваемого кольца, а удовлетворение однородным граничным условиям (14) приводит к определению собственных частот — толщинных резонансов. В итоге получим два множества значений для Ω:

$$1 - k_{15}^2 + k_{15}^2 \operatorname{tg}(\Omega_n)/\, \Omega_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (16)$$

$$\Omega_m = m\, \pi\, (c_{33}^D / c_{44})^{0,5} \quad m = 1, 2, 3, \dots \qquad (17)$$

Здесь введен коэффициент связи сдвиговых колебаний $k_{15}^2 = 1 - c_{44} / c_{44}^D$.

Для керамики *PZT*4 рассчитаны первые две толщинные частоты из уравнения (16):

$$f_{t\,1} = 1{,}180198 \text{ МГц}; f_{t\,2} = 2{,}882160 \text{ МГц}.$$

Первый корень второго множества Ω_m из (17) равен 7,8294, что соответствует частоте 4,533954 МГц.

Следует отметить одинаковые форму и вид дисперсионных кривых уравнения (15) рассматриваемой задачи для кольца из ПКМ с электродами на боковых поверхностях и антисимметричных колебаний пьезоэлектрической плиты с электродами на торцах [12]. Они отличаются только множеством (16) или началом дисперсионных кривых.

Решение данной краевой антисимметричной задачи (1–3) состоит из суммы двух решений, удовлетворяющих нулевым граничным условиям (14) при $z = \pm h$:

— однородного решения [12];

— частного решения.

Однородные решения в явном виде не входят в расчет проводимости из-за третьего соотношения системы (1). Частное решение не составляет труда построить. Пусть компоненты вектора электрической индукции частного решения равны $D_z^0 = 0$ и $D_r^0 = A\varepsilon_{11}/r$, где величина A не зависит от координаты r и определяется из электрических граничных условий при $r = a$, b. Данный выбор компонента вектора электрической индукции позволяет автоматически удовлетворить третьему уравнению системы (1). Далее потребуем, чтобы механические смещения соответственно были равны $W = 0$ и $U = Bh\sin(\Omega\varsigma)/r$. Тогда механические составляющие частного решения для антисимметричных колебаний имеют вид:

$$T_{rz}^0 = A\, e_{15}/(r \ln(a/b))\, (1 - \cos(\Omega\varsigma) / \cos(\Omega));$$

$$T_{rr}^0 = Ah\, (c_{11} - c_{12})\, e_{15} \sin(\Omega\varsigma)/(\, r^2 \ln(a/b)\, c_{44}\, \Omega \cos(\Omega));\; T_{zz}^0 = 0;$$

$$U^0 = -h\, A\, e_{15} \sin(\Omega\varsigma))/(r \ln(a/b)\, c_{44}\, \Omega \cos(\Omega)).$$

Используя закон Ома $I = 2V{\times}Y$, формулу $D_r = (e_{15}\, U,_{z} - \varepsilon_{11}\, \varphi,_{r})$ и проинтегрировав по dS (где S — площадь электродов на боковой поверхности кольца), получим проводимость Y^0 рассматриваемого кольца частного решения:

$$Y^0 = -i\omega\, C_k\, (1 - k_{15}^2 + k_{15}^2 \operatorname{tg}(\Omega)/\Omega), \qquad (18)$$

где величина C_k для низших частот равна $2h\, \varepsilon_{11}^T / \ln(a/b)$.

Из выражения (18) при низких частотах $\Omega \to 0$ получим известную формулу для проводимости $Y = -i\omega C_k$, из которой легко рассчитать ε_{11}^T.

Проводимость $Y^0 \to max$ при $\Omega = \pi/2$, что соответствует резонансной частоте $f_Y = 923760$ Гц для *PZT*4. Антирезонанс из (18) получим при $Y^0 = 0$, что соответствует $f_A = 1{,}185$ МГц для *PZT*4.

Результаты расчета критических частот с помощью программы *ANSYS* следующие: f_Y =939 КГц, $f_A = 1{,}19$ МГц.

Результаты исследования. В ходе экспериментов для реализации нового метода использована программа *ANSYS*. Численные расчеты представляют собой виртуальный эксперимент, по информативности намного превышающий возможности реального эксперимента.

Алгоритм решения обратной задачи следующий:

1. Для кольца с электродами на торцах из рассчитанных с помощью *ANSYS* первых трех резонансных частот (см. табл. 2) были численно найдены при помощи процедуры оптимизации Левенберга — Марквардта [13] или с помощью метода наименьших квадратов упругие модули гибкости:

$$s_{11} = 0{,}1229 \times 1e - 10;$$

$$s_{12} = -0{,}04049 \times 1e - 10;$$

$$s_{13} = -0{,}052844 \times 1e - 10.$$

Ошибка для модулей гибкости не превышает 1 %. Используя рассчитанные с помощью *ANSYS* первые два толщинных резонанса $f_1 = 2{,}02$ МГц и $f_2 = 6{,}728$ МГц, получим упругую константу $c_{33}^D = 15{,}427 \times 1e10$ и пьзомодуль $d_{33} = 2{,}8584 \times 1e - 10$. Ошибка не превышает 1 %.

Пьезомодуль d_{31} определим по известной методике [1] из первого антирезонанса. Модуль равен $-1{,}23{\times}1e - 10$ для частоты 73959 Гц.

2. Для кольца с электродами на боковых поверхностях для рассчитанных частот с помощью *ANSYS* $f_A = 1190$ КГц и $f_Y = 939$ КГц по формулам (16), (18) можно рассчитать c_{44} и k_{15}^2. Пьезомодуль d_{15} легко рассчитать, используя формулу: $k_{15}^2 = c_{44}\, d_{15}^2 / \varepsilon_{11}^T$.

3. Диэлектрические проницаемости ε_{33}^T и ε_{11}^T рассчитываем из измерений емкостей на частоте 1 КГц согласно [1] для колец с электродами на торцах и на боковых поверхностях соответственно.

Приведем все модули для *PZT*4, определенные новым методом на одном образце с помощью *ANSYS*:

$$s_{11} = 0{,}123\ (0{,}123);$$
$$s_{12} = -0{,}0405\ (-0{,}0405);$$
$$s_{13} = -0{,}0528\ (-0{,}0531);$$
$$s_{33} = 0{,}153\ (0{,}155);$$
$$s_{44} = 0{,}38\ (0{,}39);$$
$$d_{31} = -1{,}23\ (-1{,}23);$$
$$d_{33} = 2{,}8584\ (2{,}89);$$
$$d_{15} = 4{,}82\ (4{,}96);$$
$$\varepsilon_{33}^T = 114.95\ (115{,}05);$$
$$\varepsilon_{11}^T = 130\ (130{,}54).$$

Здесь в скобках указаны табличные справочные данные. Порядковый коэффициент для модулей соответственно 1*e*10 или 1*e* – 10 опущен.

В заключение отметим: ГОСТ, ОСТ, американский стандарт и все другие известные автору работы определения параметров поляризованной пьезокерамики методом резонанса — антирезонанса базируются на независимости констант от частоты. Насколько это соответствует реальности, предполагается обсудить в следующих статьях.

Обсуждение и заключения. В работе приведены результаты исследований нового обоснованного метода и алгоритма определения полного набора совместимых материальных констант пьезокерамики на одном образце в виде кольца с различными электродами. Сначала измеряют с электродами на торцах, а затем на том же кольце, но с новыми электродами на боковых цилиндрических поверхностях (старые электроды на торцах удаляются). Главное достоинство данного метода — для определения полного набора модулей пьезокерамики используется только один образец. В других методах измеренные модули пьезокерамики не являются совместимыми в силу того, что частоты резонансов и антирезонансов измеряются на трех различных по геометрии и степени поляризации образцах. Кроме того, в новом методе исключены измерения высокочастотных антирезонансов с электродами на торцах исследуемого элемента: технически трудно решить, какой минимум соответствует какому максимуму для высокочастотных колебаний.

Библиографический список

1. Материалы пьезокерамические. Технические условия. ОСТ 11.0444-87 / Центральный государственный фонд стандартов и технических условий. — Москва : Электростандарт, 1987. — 141 с.

2. IRE standards on piezoelectric crystals, measurements of piezoelectric ceramics / IRE. — Proceedings of the IRE. — 1961. — Vol. 49, is. 7. — P. 1162.

3. Мадорский, В. В. Исследование методик определения констант поляризованной пьезокерамики / В. В. Мадорский, В. Н. Митько // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2014. — Т. 14, № 2 (77). — С. 36–45.

4. Definition of constants for piezoceramic materials / V. A. Akopyan [et al.]. — New York : Nova Science Publisher, 2010. — 205 p.

5. Tickoo, S. ANSYS Workbench 14.0. A Tutorial Approach / S. Tickoo. — Schererville : CADCIM Technologies, 2012.— 416 p.

6. Tiersten, H.-F. Linear piezoelectric plate vibration / H.-F.-Tiersten. — New York : Plenum press, 1969. — 211 p.

7. Мадорский, В. В. Симметричные колебания пьезоэлектрических пластин / В. В. Мадорский, Ю. А. Устинов // Изв. АН Арм. ССР. — 1976. — Т. 29, № 5. — С. 51–58.

8. Analysis of 1-3 piezocomposite and homogeneous piezoelectric rings for power ultrasonic transducers / M.A.B. Andrade [et al.] // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences. — 2009. — Vol. 31, № 4. — P. 312–318.

9. Митько, В. Н. Математическое моделирование физических процессов в пьезоэлектрическом приборостроении / В. Н. Митько, Ю. А. Крамаров, А. А. Панич. — Ростов-на-Дону : Изд-во ЮФУ, 2009. — 240 с.

10. Shaw, E. A. G. On the resonant vibrations of thick barium titanate disks / E. A. G. Shaw // Journal of the Acoustical Society of America. — 1956. — Vol. 20, № 1. — P. 38–50.

11. Шарапов, В. М. Пьезоэлектрические датчики / В. М. Шарапов, М. И. Мусиенко, Е. В. Шарапова. — Москва : Техносфера, 2006. — 632 с.

12. Мадорский, В. В. Построение системы однородных решений и анализ корней дисперсионного уравнения антисимметричных колебаний пьезоэлектрической плиты / В. В. Мадорский, Ю. А. Устинов // Прикладная механика и техническая физика. — 1976. — № 6. — С. 138–145.

13. Васильев, А. Н. MATLAB. Практический подход / А. Н. Васильев. — Москва : Наука и техника, 2015. — 448 с.

References

1. Materialy p'yezokeramicheskie. Tekhnicheskie usloviya. OST 11.0444-87. [Piezoceramic materials. Performance specifications. OST 11.0444-87.] Central State Foundation of Standards and Technical Regulations. Moscow: Elektrostandart, 1987, 141 p. (in Russian).

2. IRE standards on piezoelectric crystals, measurements of piezoelectric ceramics. IRE. Proceedings of the IRE, 1961, vol. 49, iss. 7, pp. 1162.

3. Madorsky, V.V., Mitko, V.N. Issledovanie metodik opredeleniya konstant polyarizovannoy p'yezokeramiki. [Investigating constant determination techniques of polarized piezoceramics.] Vestnik of DSTU, 2014, vol. 14, no. 2 (77), pp. 36–45 (in Russian).

4. Akopyan, V.A., et al. Definition of constants for piezoceramic materials. New York: Nova Science Publisher, 2010, 205 p.

5. Tickoo, S. ANSYS Workbench 14.0. A Tutorial Approach. Schererville: CADCIM Technologies, 2012, 416 p.

6. Tiersten, H.-F. Linear piezoelectric plate vibration. New York: Plenum press, 1969, 211 p.

7. Madorsky, V.V., Ustinov, Y.A. Simmetrichnye kolebaniya p'yezoelektricheskikh plastin. [Symmetrical oscillations of piezoelectric plates.] Proceedings of the NAS RA, 1976, vol. 29, no. 5, pp. 51–58 (in Russian).

8. Andrade, M.-A.-B., et al. Analysis of 1-3 piezocomposite and homogeneous piezoelectric rings for power ultrasonic transducers. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, 2009, vol. 31, no. 4, pp. 312–318.

9. Mitko, V.N., Kramarov, Y.A., Panich, A.A. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v p'yezoelektricheskom priborostroenii. [Mathematical modeling of physical processes in piezoelectric instrument making.] Rostov-on-Don: SFU Publ. House, 2009, 240 p. (in Russian).

10. Shaw, E. A. G. On the resonant vibrations of thick barium titanate disks. Journal of the Acoustical Society of America, 1956, vol. 20, no. 1, pp. 38–50.

11. Sharapov, V.M., Musienko, M.I., Sharapova, V.E. P'yezoelektricheskie datchiki. [Piezoelectric detectors.] Moscow: Tekhnosfera, 2006, 632 p. (in Russian).

12. Madorsky, V.V., Ustinov, Y.A. Postroenie sistemy odnorodnykh resheniy i analiz korney dispersionnogo uravneniya antisimmetrichnykh kolebaniy p'yezoelektricheskoy plity. [Construction of a system of homogeneous solutions and analysis of the roots of the dispersion equation of antisymmetric vibrations of a piezoelectric plate.] Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1976, no. 6, pp. 138–145 (in Russian).

13. Vasilyev, A.N. MATLAB. Prakticheskiy podkhod. [MATLAB. Practical approach.] Moscow: Nauka i tekhnika, 2015, 448 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 11.07.2017
Сдана в редакцию 12.07.2017
Запланирована в номер 10.10.2017

Received 11.07.2017
Submitted 12.07.2017
Scheduled in the issue 10.10.2017

Об авторе:

Мадорский Виктор Вениаминович,
доцент кафедры «Электротехника и электроника» Донского государственного технического университета (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0320-5074
epohrbats@Gmail.com

Author:

Madorsky, Victor V.,
associate professor of the Electrical Engineering and Electronics Department, Don State Technical University (RF, 344000, Rostov-on-Don, Gagarin sq., 1), Cand.Sci. (Phys.-Math.), associate professor, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0320-5074
epohrbats@Gmail.com